

# Zur unelastischen Elektronenstreuung an Teilchen-Loch-Zuständen von Ca40

Weigert, L. J.

Veröffentlicht in:  
Abhandlungen der Braunschweigischen  
Wissenschaftlichen Gesellschaft Band 19, 1967,  
S. 114-133



Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig

# Zur unelastischen Elektronenstreuung an Teilchen-Loch-Zuständen von $\text{Ca}^{40\ 1)}$

Von L. J. Weigert

Vorgelegt von Max Kohler

(Eingegangen am 18. 4. 1967)

**Übersicht:** Angeregte Teilchen-Loch-Zustände von  $\text{Ca}^{40}$  mit  $JP = 1^-$  und  $T = 1$  und ihre Energien wurden mit dem RPA-Verfahren bestimmt. Für diese Zustände wurden die transversalen Anteile der Matrixelemente für elektronische Übergänge vom Grundzustand aus in Abhängigkeit von der Impulsübertragung ausgewertet und diskutiert.

*Summary:* With the use of the RPA, excited particle-hole states of  $\text{Ca}^{40}$  with  $JP = 1^-$  and  $T = 1$  are determined together with their energies. The transverse parts of the matrix elements for transitions from the ground state to these excited states are evaluated and discussed as functions of the momentum transfer.

## 1. Einleitung

Die unelastische Streuung von Elektronen an Atomkernen ist eine wichtige und erfolgreiche Methode zur Untersuchung der Struktur der Atomkerne [1]. Bei einem solchen unelastischen Streuprozess wird Energie und Impuls vom Elektron auf den streuenden Kern übertragen und dieser in einen angeregten Zustand versetzt. Aus dem Wirkungsquerschnitt für diesen Prozess lassen sich Rückschlüsse ziehen auf die an dem Übergang beteiligten Matrixelemente und damit auf die Wellenfunktionen von Grundzustand und angeregtem Zustand des Targetkerns.

Die Untersuchung der Kernstruktur mit unelastisch gestreuten Elektronen besitzt vor allem deswegen eine so große Bedeutung, weil hierbei — im Unterschied etwa zur Kernanregung durch nukleare Teilchen — die Anregung des Targetkerns durch die wohlbekannte elektromagnetische Wechselwirkung vermittelt wird. Bei dem Vergleich experimentell bestimmter und modellmäßig berechneter Matrixelemente bietet die Kenntnis der Wechselwirkung einen erheblichen Vorteil.

Auch im Vergleich mit Photonenprozessen weisen Elektronenprozesse charakteristische Vorzüge auf. Bei der Anregung von Atomkernen mit Photonen ist der vom Kern aufgenommene Impuls stets gleich der vom Kern aufgenommenen Energie<sup>2)</sup>. Daher können durch Photoabsorption die Matrixelemente für den Übergang vom Grundzustand in einen angeregten Zustand des Kerns stets nur

<sup>1)</sup> Als Habilitationsschrift genehmigt von der Naturwissenschaftlich-Philosophischen Fakultät der Technischen Hochschule Carolo-Wilhelmina zu Braunschweig.

<sup>2)</sup> Hier und im folgenden werden natürliche Einheiten  $\hbar = c = 1$  benutzt.

für einen der Anregungsenergie entsprechenden Wert der Impulsübertragung bestimmt werden. Für die unelastische Elektronenstreuung gilt diese Einschränkung jedoch nicht. Hier kann bei der Anregung eines bestimmten Niveaus, also bei vorgegebener Energieübertragung, durch Änderung der Streugeometrie die Impulsübertragung in einem weiten Bereich variiert werden; die zum Übergang beitragenden Matrixelemente können so in ihrer Abhängigkeit von der Impulsübertragung bestimmt werden. Die Kenntnis einer solchen funktionellen Abhängigkeit der Matrixelemente gestattet einen wesentlich detaillierten Vergleich mit theoretischen Vorstellungen als die Kenntnis der Matrixelemente für nur einen Wert der Impulsübertragung. Darüber hinaus kommt bei Elektronenprozessen sowohl der transversale wie auch der longitudinale Anteil der elektromagnetischen Wechselwirkung ins Spiel, während bei Photonenprozessen allein der transversale Anteil vorhanden ist.

Besondere Aufmerksamkeit von theoretischer und experimenteller Seite erhielt in letzter Zeit die Untersuchung der Riesenresonanzen leichter Kerne mit unelastisch gestreuten Elektronen [2–8]. Als Riesenresonanz bezeichnet man [9] ein Maximum im Wirkungsquerschnitt für elektromagnetische Prozesse, das bei allen Kernen auftritt. Es liegt bei  $\approx 24$  MeV bei leichten Kernen ( $A \approx 10$ ) und verschiebt sich mit steigendem Atomgewicht zu niedrigeren Energien ( $\approx 14$  MeV bei  $A \approx 200$ ). Seine Breite beträgt 3–4 MeV für sphärische Kerne, sie ist größer bei deformierten Kernen. Die Riesenresonanzen besitzen elektrischen Dipolcharakter und erschöpfen größenordnungsmäßig die Summenregel für E 1-Übergänge.

Die ersten Modelle zur Beschreibung der Riesenresonanzen besaßen kollektiven Charakter. *Goldhaber* und *Teller* [10] nahmen an, daß sich die Neutronen und die Protonen im Kern wie zwei einander durchdringende, inkompressible Flüssigkeiten verhalten. Die mit relativen Dipolschwingungen der beiden Flüssigkeiten verbundene niedrigste Frequenz entspricht gut der Anregungsenergie der Riesenresonanzen, ihre Abhängigkeit vom Atomgewicht wird ebenfalls befriedigend dargestellt. In einem ähnlichen Modell nahmen *Steinwedel* und *Jensen* [11] an, daß sich zwar die Dichten der Neutronen- und Protonenflüssigkeit ändern können, aber nur so, daß die Gesamtdichte des Kernels konstant bleibt. Auch bei einem solchen System können Dipolschwingungen angeregt werden, die Energie des untersten Niveaus entspricht wiederum der der Riesenresonanzen. Ihre Abhängigkeit vom Atomgewicht wird in diesem Modell etwas besser wiedergegeben als in dem von *Goldhaber* und *Teller*.

*Danos* und *Greiner* [12] berücksichtigen außer den Dipolschwingungen noch die Kollektivanregungen der Kernoberfläche [13–15] und kommen so zu detaillierten Aussagen über die Struktur der Riesenresonanzen [16] bei mittelschweren und schweren Kernen ( $A > 50$ ).

Eine andere Möglichkeit zur Interpretation der Riesenresonanzen wurde von *Wilkinson* [17] vorgeschlagen und vor allem von *Brown* und Mitarbeitern weiterentwickelt [18–21]. Ausgehend vom Schalenmodell des Atomkerns wird hier angenommen, daß zum Zustandekommen der Riesenresonanzen vor allem solche angeregten Zustände des Atomkerns beitragen, die durch den Übergang eines Nukleons aus der obersten besetzten Schale in die nächste unbesetzte Schale entstehen. Für die Beschreibung der Riesenresonanz werden nur die-

jenigen angeregten Zustände berücksichtigt, deren Drehimpuls sich von dem des Grundzustands um eine Einheit unterscheidet; im Falle leichter Kerne besitzen diese Zustände außerdem automatisch die entgegengesetzte Parität des Grundzustands, wie es für E 1-Übergänge erforderlich ist.

Die Anwendung dieses Modells ist — vor allem aus rechentechnischen Gründen — auf leichte Kerne mit abgeschlossenen Schalen oder Unterschalen beschränkt. Diese Kerne besitzen Drehimpuls/Parität  $JP = 0^+$  im Grundzustand. Bei ihnen führt der erwähnte Übergang eines Nukleons zur Bildung eines Lochs in der obersten Schale, das mit dem Nukleon in der nächsthöheren Schale zu Zuständen mit  $JP = 1^-$  gekoppelt wird. Diese Zustände tragen dominierend zur Bildung der Riesenresonanz bei. Auf Einzelheiten des Teilchen-Loch-Modells wird in Abschnitt 3 eingegangen werden.

Durch Streuung unelastischer Elektronen an  $O^{16}$  und  $C^{12}$  konnte gezeigt werden, daß die transversalen Anteile der zur Riesenresonanz beitragenden Matrixelemente in ihrer Abhängigkeit von der Impulsübertragung ein charakteristisches Minimum bei etwa 50 MeV besitzen. Dieses Minimum kann vom Teilchen-Loch-Modell in guter Übereinstimmung mit dem Experiment beschrieben werden [3, 8]. Bei der Berechnung der transversalen Anteile der Matrixelemente nach den Flüssigkeitsmodellen tritt kein solches Minimum auf. Die gleiche Struktur im transversalen Anteil wurde für  $Ca^{40}$  nach dem Teilchen-Loch-Modell gefunden [6], jedoch liegen hier noch keine ausreichenden Meßwerte vor, die einen Vergleich mit der Theorie ermöglichen.

Diese Übereinstimmung der Vorhersagen des Teilchen-Loch-Modells mit den experimentellen Befunden bei leichten Kernen läßt weitere Untersuchungen an diesem Modell wünschenswert erscheinen. Insbesondere erhebt sich die Frage, ob und wie stark die erwähnten Resultate von dem für die Bestimmung der angeregten Teilchen-Loch-Zustände benützten Näherungsverfahren abhängen. Bei den Berechnungen der transversalen Matrixelemente [3, 6, 8] für  $C^{12}$ ,  $O^{16}$  und  $Ca^{40}$  wurden die angeregten Teilchen-Loch-Zustände mit Hilfe der Tamm-Dancoff-Methode (s. Abschnitt 3) erhalten. In der vorliegenden Arbeit werden für  $Ca^{40}$  die angeregten Teilchen-Loch-Zustände mit  $JP = 1^-$  und Isospin  $T = 1$  mit Hilfe des aufwendigeren, aber besseren zeitabhängigen Hartree-Fock-Verfahrens (s. Abschnitt 3) bestimmt und die transversalen Matrixelemente für elektromagnetische Übergänge vom Grundzustand zu diesen angeregten Zuständen in ihrer Abhängigkeit von der Impulsübertragung berechnet. Die Ergebnisse werden dann mit den nach der Tamm-Dancoff-Methode erhaltenen verglichen.

In Abschnitt 2 werden die für die unelastische Elektronenstreuung an Atomkernen wichtigen Begriffe eingeführt und die Herleitung des differentiellen Wirkungsquerschnitts kurz skizziert. Auf das Teilchen-Loch-Modell für Kernanregungen wird in Abschnitt 3 eingegangen; dort werden auch die beiden erwähnten Näherungsverfahren zur Bestimmung der angeregten Zustände erläutert. Abschnitt 4 beschäftigt sich mit der Anwendung des zeitabhängigen Hartree-Fock-Verfahrens auf  $Ca^{40}$  zur Bestimmung der angeregten Zustände dieses Kerns. In Abschnitt 5 schließlich werden die uns in diesem Zusammenhang besonders interessierenden transversalen Übergangsmatrixelemente berechnet.

## 2. Der Wirkungsquerschnitt für unelastische Elektronenstreuung

Es werde ein Elektron mit dem Viererimpuls  $(\mathbf{p}_a, iE_a)$  betrachtet, das nach der Streuung an einem Atomkern den Viererimpuls  $(\mathbf{p}_b, iE_b)$  besitze. Der Impulsübertragungsvektor für den Streuprozess ist gegeben durch

$$\mathbf{k} = \mathbf{p}_a - \mathbf{p}_b, \quad (2.1)$$

die Energieübertragung ist

$$\varepsilon = E_a - E_b. \quad (2.2)$$

Wegen der großen Masse des Atomkerns kann seine Translationsenergie gegenüber seiner Anregungsenergie vernachlässigt werden [22]; dann ist die Energieübertragung  $\varepsilon$  gleich der Anregungsenergie des Kerns.

Die Übergangswahrscheinlichkeit für den Streuprozess ist

$$w = 2\pi \mathbf{S} |H_{ba}|^2 D(E_b), \quad (2.3)$$

wobei  $H_{ba}$  das Übergangsmatrixelement zwischen Anfangs- und Endzustand des Systems Kern-Elektron bezeichnet; die Summierung über alle nichtbeobachteten Größen wird durch  $\mathbf{S}$  vorgeschrieben;  $D(E_b)$  ist die Dichte der Endzustände. Wird bei der Bestimmung von  $D(E_b)$  der Rückstoß des Kerns ebenfalls vernachlässigt, so ergibt sich der differentielle Wirkungsquerschnitt zu

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{E_a E_b}{(2\pi)^2} \frac{p_b}{p_a} \mathbf{S} |H_{ba}|^2. \quad (2.4)$$

Zur Auswertung von (2.4) kann man für  $H_{ba}$  korrespondenzmäßig die retardierte elektromagnetische Wechselwirkung zwischen dem Übergangsviererstrom des Elektrons  $(j_\mu(\mathbf{r}_e)) = (\mathbf{j}(\mathbf{r}_e), i\rho_e(\mathbf{r}_e))$  und dem Übergangsviererstrom des Kerns  $(J_\mu(\mathbf{r}_K)) = (\mathbf{J}(\mathbf{r}_K), i\rho_K(\mathbf{r}_K))$  ansetzen [22], also

$$H_{ba} = - \int j_\mu(\mathbf{r}_e) \frac{e^{i\varepsilon|\mathbf{r}_e - \mathbf{r}_K|}}{|\mathbf{r}_e - \mathbf{r}_K|} J_\mu(\mathbf{r}_K) d\mathbf{r}_e d\mathbf{r}_K. \quad (2.5)$$

Für leichte Kerne und nicht zu niedrige Elektronenenergien kann die Verformung der Elektronenwellenfunktionen durch das Coulombpotential des Kerns vernachlässigt [23, 24] und der Anfangs- und Endzustand des Elektrons in Bornscher Näherung durch ebene Wellen beschrieben werden<sup>1)</sup>. In dieser Näherung erhält man für den Übergangsviererstrom des Elektrons

$$j_\mu(\mathbf{r}_e) = ie \bar{u}_b(\mathbf{p}_b) \gamma_\mu u_a(\mathbf{p}_a) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_e}, \quad (2.6)$$

wobei  $u(\mathbf{p})$  die Viererspinoren und  $\gamma_\mu$  die Dirac-Matrizen bezeichnen. Mit (2.6) ergibt die Integration über  $\mathbf{r}_e$  in (2.5)

$$H_{ba} = - \frac{4\pi}{k^2 - \varepsilon^2} \int j_\mu(\mathbf{r}) J_\mu(\mathbf{r}) d\mathbf{r}. \quad (2.7)$$

<sup>1)</sup> Den Einfluß des Coulombfeldes kann man berücksichtigen [24], indem man den in Bornscher Näherung erhaltenen Wirkungsquerschnitt durch Einführung eines effektiven Impulsübertragungsvektors  $\mathbf{k}_{\text{eff}} = \mathbf{k}(1 + 3Ze^2/2E_a R)$  an Stelle von  $\mathbf{k}$  modifiziert ( $R$  ist der Kernradius). Für  $\text{Ca}^{40}$  und  $E_a = 200 \text{ MeV}$  beträgt der Unterschied zwischen  $\mathbf{k}$  und  $\mathbf{k}_{\text{eff}}$  etwa 5%.

Es ist an dieser Stelle bequem, das Vierervektorprodukt in (2.7) in seinen räumlichen und zeitlichen Anteil aufzuspalten,

$$\mathbf{j}_\mu(\mathbf{r})J_\mu(\mathbf{r}) = \mathbf{j}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}) - \varrho_e(\mathbf{r})\varrho_K(\mathbf{r}). \quad (2.8)$$

Der räumliche Anteil  $\mathbf{j}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r})$  in (2.8) setzt sich zusammen aus einem transversalen Anteil, der nur die Komponenten von  $\mathbf{j}$  und  $\mathbf{J}$  senkrecht zu  $\mathbf{k}$  enthält, und einem longitudinalen Anteil, der die Komponenten von  $\mathbf{j}$  und  $\mathbf{J}$  parallel zu  $\mathbf{k}$  enthält,

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}) = \mathbf{j}_t(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{J}_t(\mathbf{r}) + \mathbf{j}_l(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{J}_l(\mathbf{r}). \quad (2.9)$$

Mit Hilfe der Kontinuitätsgleichungen für die Übergangsströme kann der longitudinale Anteil in (2.9) durch die Ladungsdichten ausgedrückt werden in der Form

$$\mathbf{j}_l(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{J}_l(\mathbf{r}) = \frac{\varepsilon^2}{k^2} \varrho_e(\mathbf{r})\varrho_K(\mathbf{r}). \quad (2.10)$$

Setzt man schließlich (2.8) bis (2.10) in (2.7) ein, so erhält man mit  $\mathbf{j}_t \cdot \mathbf{J}_t = \mathbf{j} \cdot \mathbf{J}$

$$H_{ba} = -\frac{4\pi}{k^2 - \varepsilon^2} \int \mathbf{j}_t(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} + \frac{4\pi}{k^2} \int \varrho_e(\mathbf{r}) \varrho_K(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \quad (2.11)$$

als Summe aus einem „transversalen“ und einem „Coulombanteil“. In den transversalen Anteil geht neben dem Übergangsstrom des Kerns nur die Transversalkomponente des Übergangsviererstroms des Elektrons ein; der Coulombanteil hängt nur von den Übergangsladungsdichten für Kern und Elektron ab.

Die für den streuenden Kern charakteristischen Größen  $\mathbf{J}(\mathbf{r})$  und  $\varrho_K(\mathbf{r})$  sind die Matrixelemente der entsprechenden Operatoren zwischen dem Anfangszustand  $|K_a\rangle$  und dem Endzustand  $|K_b\rangle$  des Kerns,

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}) = \langle K_b | \mathbf{J}^{op}(\mathbf{r}) | K_a \rangle, \quad (2.12a)$$

$$\varrho_K(\mathbf{r}) = \langle K_b | \varrho_K^{op}(\mathbf{r}) | K_a \rangle. \quad (2.12b)$$

Zu einem Übergang  $K_a \rightarrow K_b$  können nur bestimmte Multipolordnungen von  $H_{ba}$  beitragen, da für Kernzustände der Gesamtdrehimpuls  $J$  und die Parität  $P$  gute Quantenzahlen sind. Es ist daher zweckmäßig,  $H_{ba}$  nach Multipolen zu entwickeln. Hierdurch [25] wird  $H_{ba}$  in drei Anteile zerlegt,

$$H_{ba} = H_{ba}^{(e)} + H_{ba}^{(m)} + H_{ba}^{(c)}, \quad (2.13)$$

wobei

$$H_{ba}^{(e)} = \frac{(4\pi)^{3/2}e}{k^2 - \varepsilon^2} \sum_{L=1}^{\infty} \sum_{M=-L}^L (2L+1)^{1/2} C(J_a L J_b; M_a M M_b) \mathcal{M}_L^{(e)}(k) \\ \times (2)^{-1/2} \sum_{M'=-1,1} \bar{u}_b i \gamma_{M'} u_a D_{MM'}^L(\varphi_k, \vartheta_k, 0) \quad (2.14a)$$

der transversal-elektrische,

$$H_{ba}^{(m)} = \frac{(4\pi)^{3/2}e}{k^2 - \varepsilon^2} \sum_{L=1}^{\infty} \sum_{M=-L}^L (2L+1)^{1/2} C(J_a L J_b; M_a M M_b) \mathcal{M}_L^{(m)}(k) \\ \times (2)^{-1/2} \sum_{M'=-1,1} M' \bar{u}_b i \gamma_{M'} u_a D_{MM'}^L(\varphi_k, \vartheta_k, 0) \quad (2.14b)$$

der transversal-magnetische und

$$H_{ba}^{(c)} = \frac{(4\pi)^{3/2} e}{k^2} \sum_{L=0}^{\infty} \sum_{M=-L}^L (2L+1)^{1/2} C(J_a L J_b; M_a M M_b) \times \mathcal{M}_L^{(c)} u_l^* u_a D_{M0}^L(\varphi_k, \vartheta_k, 0) \quad (2.14c)$$

der Coulombanteil ist. Für die Clebsch-Gordan-Koeffizienten  $C(l_1 l_2 l_3; m_1 m_2 m_3)$  und die Drehmatrizen  $D_{mm'}^L(x, \beta, \gamma)$  werden die Bezeichnungsweise und die Konventionen von Rose [26] verwendet. Die Argumente  $\vartheta_k, \varphi_k$  in den Drehmatrizen stehen für den Polar- bzw. Azimutwinkel von  $\mathbf{k}$  bezogen auf das raumfeste Koordinatensystem, dessen z-Achse mit der Quantisierungsrichtung der Drehimpulse zusammenfällt. Ferner ist  $\gamma_{M'} = \boldsymbol{\gamma} \cdot \bar{\mathbf{e}}_{M'}$ , wobei  $\bar{\mathbf{e}}_0 = \mathbf{k}/k$ ,  $\bar{\mathbf{e}}_1$  und  $\bar{\mathbf{e}}_{-1}$  die sphärische Basis eines Koordinatensystems mit der Richtung von  $\mathbf{k}$  als Polarachse ist. Die reduzierten Kernmatrixelemente  $\mathcal{M}_L^{(\tau)}$  mit  $\tau = e, m, c$  sind definiert durch

$$i^L \int \mathbf{A}_L^M(\mathbf{e}; k, \mathbf{r}) \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = C(J_a L J_b; M_a M M_b) \mathcal{M}_L^{(e)}(k), \quad (2.15a)$$

$$i^{L+1} \int \mathbf{A}_L^M(\mathbf{m}; k, \mathbf{r}) \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = C(J_a L J_b; M_a M M_b) \mathcal{M}_L^{(m)}(k), \quad (2.15b)$$

$$i^L \int j_L(kr) Y_L^M(\vartheta, \varphi) \varrho_K(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = C(J_a L J_b; M_a M M_b) \mathcal{M}_L^{(c)}(k). \quad (2.15c)$$

Die Größen

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_L^M(\mathbf{e}; k, \mathbf{r}) = & -[L/(2L+1)]^{1/2} j_{L+1}(kr) \mathbf{T}_{LL+1}^M(\vartheta, \varphi) + \\ & + [(L+1)/(2L+1)]^{1/2} j_{L-1}(kr) \mathbf{T}_{LL-1}^M(\vartheta, \varphi) \end{aligned} \quad (2.16a)$$

beziehungsweise

$$\mathbf{A}_L^M(\mathbf{m}; k, \mathbf{r}) = j_L(kr) \mathbf{T}_{LL}^M(\vartheta, \varphi) \quad (2.16b)$$

sind die (divergenzfreien) elektrischen bzw. magnetischen Multipolfelder in der Coulombbeugung; die sphärischen Tensoren [26]  $\mathbf{T}_{LL'}^M(\vartheta, \varphi)$  sind dabei gegeben durch

$$\mathbf{T}_{LL}^M(\vartheta, \varphi) = \sum_{\mu} C(L' 1 L; M - \mu, \mu) Y_{L'}^{M-\mu}(\vartheta, \varphi) \mathbf{e}_{\mu} \quad (2.17)$$

mit  $\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_{-1}$  als sphärischer Basis des raumfesten Koordinatensystems. Weiter bezeichnen die  $j_l(kr)$  die sphärischen Besselfunktionen und  $Y_l^m(\vartheta, \varphi)$  die Kugelfunktionen. Schließlich sind  $\vartheta$  und  $\varphi$  der Polar- bzw. Azimutwinkel im raumfesten System.

Unter Verwendung der Beziehungen (2.13) bis (2.17) kann der im Wirkungsquerschnitt (2.4) vorkommende Ausdruck  $\mathbf{S} |H_{ba}|^2$  ermittelt werden. Werden Orientierungseffekte nicht in Betracht gezogen, so fallen alle Interferenzglieder zwischen den drei Anteilen von  $H_{ba}$  weg und für den differentiellen Wirkungsquerschnitt ergibt sich<sup>1)</sup>

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} = & 8\pi e^2 \frac{p_b}{p_a} \frac{2J_b + 1}{2J_a + 1} \sum_{L=0}^{\infty} \left\{ \frac{E_a E_b - \mathbf{p}_a \cdot \mathbf{k} \mathbf{p}_b \cdot \mathbf{k} / k^2 - 1}{(k^2 - \varepsilon^2)^2} \right. \\ & \times [ |\mathcal{M}_L^{(e)}|^2 + |\mathcal{M}_L^{(m)}|^2 ] + \frac{E_a E_b + \mathbf{p}_a \cdot \mathbf{p}_b + 1}{k^4} |\mathcal{M}_L^{(c)}|^2 \end{aligned} \quad (2.18)$$

<sup>1)</sup> Ruhmasse des Elektrons = 1.

Wegen der Auswahlregeln für Drehimpuls und Parität brauchen im allgemeinen nur wenige Glieder in (2.18) berücksichtigt zu werden.

Die kernphysikalische Seite des Problems ist in den reduzierten Matrixelementen  $\mathcal{M}_L^{(p)}$  enthalten. Sie können nur unter speziellen Modellannahmen bestimmt werden, da es keine modellunabhängigen Ausdrücke für die Übergangsoperatoren  $J^{op}(\mathbf{r})$  bzw.  $\rho_K^{op}(\mathbf{r})$  gibt und auch die Beschreibung der Kernzustände vom Modell abhängt.

### 3. Teilchen-Loch-Anregungen in Atomkernen

Dem Begriff der Teilchen-Loch-Anregungen in Atomkernen liegt das Schalenmodell [27] zugrunde. Im Schalenmodell mit  $j$ - $j$ -Kopplung wird ein Einteilchenzustand charakterisiert durch die Radialquantenzahl  $n$ , den Bahndrehimpuls  $l$ , den Gesamtdrehimpuls  $j$ , dessen Projektionsquantenzahl  $m$  und die dritte Isospinkomponente  $\tau$ . Zustände mit gleichen  $n$ ,  $l$  und  $j$  sind entartet.

Im Grundzustand eines leichten Kerns mit abgeschlossenen Schalen sind die energetisch tiefsten Schalen gleichmäßig mit Neutronen und Protonen aufgefüllt (beim  $\text{Ca}^{40}$  z. B. die untersten drei Schalen). Für diesen Zustand ist Drehimpuls und Parität  $JP = 0^+$  und der Gesamtsospin  $T = 0$ . Ein solcher Kern besitzt angeregte Zustände, bei denen ein oder mehrere Nukleonen aus den im Grundzustand besetzten Niveaus in höhere, im Grundzustand unbesetzte Niveaus angehoben sind. Diese angeregten Zustände werden als Teilchen-Loch-Anregungen bezeichnet.

Der einfachste Fall einer Teilchen-Loch-Anregung ist derjenige, bei dem nur ein einziges Teilchen-Loch-Paar existiert. Zur Beschreibung eines solchen Zustandes wird man vorteilhaft eine Darstellung wählen, in der der Gesamtdrehimpuls  $J$  und der Isospin  $T$  des Paares gute Quantenzahlen sind. Dies kann durch geeignete Kopplung von Teilchen- und Lochzuständen mit Hilfe des Racah-Formalismus [26] erreicht werden. Die Einteilchenzustände sind gegeben durch

$$|j, m, \tau\rangle = |nl\rangle \sum_{\sigma} C(l \frac{1}{2} j; m - \sigma, \sigma) |l, m - \sigma\rangle | \frac{1}{2}, \sigma\rangle | \frac{1}{2}, \tau\rangle, \quad (3.1)$$

wobei  $\sigma$  die Spinprojektionsquantenzahl bezeichnet. Die Phase des Winkelanteils  $|l\mu\rangle$  sei so gewählt, daß seine Ortsdarstellung die Kugelfunktion  $Y_l^{\mu}$  in der Definition von *Condon* und *Shortley* [28] wird. Lochzustände können als adjungierte Teilchenzustände aufgefaßt werden [29] mit einer zusätzlichen Phase, die das richtige Verhalten bei Drehungen und bei der Addition von Drehimpulsen gewährleistet; und zwar ist für den Lochzustand, bei dem ein Teilchen mit  $j, m, \tau$  fehlt

$$\begin{aligned} |\bar{j}, \bar{m}, \bar{\tau}\rangle &= (-)^{j-m+\frac{1}{2}+\tau} \langle j, m, \tau | \\ &= \langle nl | \sum_{\sigma} C(l \frac{1}{2} j; -m + \sigma, -\sigma) (-)^{l+m-\sigma} \langle l, m - \sigma | (-)^{\frac{1}{2}+\sigma} \\ &\quad \times \langle \frac{1}{2}, \sigma | (-)^{\frac{1}{2}+\tau} \langle \frac{1}{2}, \tau |. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Für ein Teilchen-Loch-Paar mit Gesamtdrehimpuls  $J$ , Projektionsquantenzahl  $M$ , Gesamtsospin  $T$  und dritter Isospinkomponente  $T_3$  ergibt sich



$$\begin{aligned}
& |\bar{j}_a, j_b; JM; TT_3\rangle = \\
& = \sum_{m_a} C(j_a j_b J; -m_a m_b M) \sum_{\tau_a} C\left(\frac{1}{2} \frac{1}{2} T; -\tau_a \tau_b T_3\right) |\bar{j}_a \bar{m}_a \bar{\tau}_a\rangle |j_l m_l \tau_l\rangle \\
& = |n_b l_b\rangle \langle n_a l_a | [(2j_a + 1)(2j_b + 1)]^{1/2} \sum_{LS} [(2L + 1)(2S + 1)]^{1/2} \left\{ \begin{matrix} l_a & \frac{1}{2} & j_a \\ l_b & \frac{1}{2} & j_b \\ L & S & J \end{matrix} \right\} \\
& \times \sum_A C(LS J; A, M - A) \sum_{\lambda_a} C(l_a l_b L; -\lambda_a, \lambda_a + A) |l_b, \lambda_a + \lambda\rangle (-)^{l_a + \lambda_a} \\
& \quad \times \langle l_a, \lambda_a | \\
& \times \sum_{\sigma_a} C\left(\frac{1}{2} \frac{1}{2} S; -\sigma_a, \sigma_a + M - A\right) \left| \frac{1}{2}, \sigma_a + M - A \right\rangle (-)^{\frac{1}{2} + \sigma_a} \left\langle \frac{1}{2}, \sigma_a \right| \\
& \times \sum_{\tau_a} C\left(\frac{1}{2} \frac{1}{2} T; -\tau_a, \tau_a + T_3\right) \left| \frac{1}{2}, \tau_a + T_3 \right\rangle (-)^{\frac{1}{2} + \tau_a} \left\langle \frac{1}{2}, \tau_a \right|. \quad (3.3)
\end{aligned}$$

Hierbei ist  $\{\dots\}$  ein 9- $j$ -Symbol [26].

Bekanntlich [30] reicht das zentralsymmetrische Einteilchenpotential, wie es zunächst bei der Formulierung des Schalenmodells postuliert wird, nicht aus, wenn es sich darum handelt, Mehrteilchenkonfigurationen zu beschreiben. Erst die Einführung einer Restwechselwirkung zwischen den Nukleonen in nichtaufgefüllten Schalen führt zu der experimentell beobachteten Aufspaltung der verschiedenen Zustände einer Konfiguration. Da es im allgemeinen Fall noch nicht gelungen ist, das Zentralpotential — etwa nach *Hartree-Fock* — aus den Zweikörperkräften herzuleiten, ist auch die Zurückführung der Restwechselwirkung auf die Zweikörperkräfte noch offen.

Auch Teilchen-Loch-Anregungen führen zu einer Abweichung des Potentials von der Kugelsymmetrie und machen die Einführung einer abstoßenden Restwechselwirkung [18, 19] erforderlich. (Die Restwechselwirkung zwischen Teilchen ist anziehend.) Für die Teilchen-Loch-Wechselwirkung benutzen wir, wie in WE, ein kurzreichweitiges Potential mit Spinaustauschcharakter der Form

$$V(\mathbf{r}_a, \mathbf{r}_b, \sigma_a, \sigma_b) = V_0(1 - \eta + \eta \sigma_a \cdot \sigma_b) \delta(\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b). \quad (3.4)$$

Da das Potential (3.4) ein Skalar ist, sind die Matrixelemente von (3.4) zwischen Zuständen (3.3) unabhängig von den Projektionsquantenzahlen. Sie ergeben sich zu

$$\begin{aligned}
& \langle \bar{j}_{a'}, j_{b'}; J'0; T'0 | V | \bar{j}_a, j_b; J0; T0 \rangle = \frac{V_0}{4\pi} (-)^{l_a + l_{a'}} \\
& \times [(2l_{a'} + 1)(2l_a + 1)(2l_{b'} + 1)(2l_b + 1)(2j_{a'} + 1)(2j_a + 1)(2j_{b'} + 1) \times \\
& \quad \times (2j_b + 1)]^{1/2} \times \sum_{LS} (2S + 1) C(l_{a'} l_{b'} L; 00) C(l_a l_b L; 00) \\
& \quad \times \left\{ \begin{matrix} l_{a'} & \frac{1}{2} & j_{a'} \\ l_{b'} & \frac{1}{2} & j_{b'} \\ L & S & J' \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} l_a & \frac{1}{2} & j_a \\ l_b & \frac{1}{2} & j_b \\ L & S & J \end{matrix} \right\} [1 + (-)^S 2\eta] \delta_{JJ'} \delta_{TT'} \\
& \times \int_0^\infty R(n_{a'} l_{a'}) R(n_{b'} l_{b'}) R(n_a l_a) R(n_b l_b) r^2 dr, \quad (3.5)
\end{aligned}$$

wobei wir mit  $R(nl)$  die Radialfunktionen im Konfigurationsraum bezeichnet haben.

Wir sind im folgenden interessiert an angeregten Zuständen mit  $JP = 1^-$  und  $T = 1$ , die energetisch in der Gegend der Riesenresonanzen liegen, da solche Zustände im wesentlichen zum Zustandekommen der Riesenresonanzen beitragen. Bei der Bestimmung der angeregten Zustände beschränken wir uns daher auf denjenigen Unterraum der Teilchen-Loch-Paare, der der Anregung eines einzigen Teilchen-Loch-Paares entspricht mit dem Teilchenzustand in der untersten (im Grundzustand) nichtbesetzten Schale (Index 2) und dem Lochzustand in der obersten (im Grundzustand) besetzten Schale (Index 1). Alle anderen Teilchen-Loch-Zustände mit negativer Parität liegen energetisch mindestens zwei mittlere Schalenabstände von diesen Zuständen entfernt, so daß ihre Vernachlässigung gerechtfertigt erscheint.

Mit den eben gemachten Annahmen läßt sich das Matrixelement (3.5) umformen [6] zu

$$\langle \bar{j}_1' j_2' | V | \bar{j}_1 j_2 \rangle \equiv \langle \bar{j}_1' j_2'; 10; 10 | V | \bar{j}_1 j_2; 10; 10 \rangle = \frac{V_0}{8\pi} [(2j_1 + 1)(2j_1' + 1)]^{1/2} C(j_1' 1 j_2'; \frac{1}{2} 0) C(j_1 1 j_2; \frac{1}{2} 0) \quad (3.6)$$

$$\times [1 + 2\eta + \frac{1}{2}(1 - 2\eta)(\kappa_1' - \kappa_2')(\kappa_1 - \kappa_2)]$$

$$\times \int_0^\infty R(n_1' l_1') R(n_2' l_2') R(n_1 l_1) R(n_2 l_2) r^2 dr$$

mit

$$\kappa = (2j + 1)(l - j). \quad (3.7)$$

Zur Bestimmung der angeregten Paarzustände und deren Energien ist außer den Matrixelementen (3.6) noch die Kenntnis der ungestörten Paarenergien d. i. ohne Einfluß der Restwechselwirkung) erforderlich. Diese hängen ab von den Energien  $\varepsilon_{j_1}$  und  $\varepsilon_{j_2}$  der an der Bildung des Paarzustandes beteiligten Einzelteilchenzustände. Man kann sich diese Größen empirisch verschaffen aus den angeregten Zuständen der benachbarten Isotope sowie deren Bindungsenergie und der Bindungsenergie des betrachteten Kerns. Die ungestörte Paarenergie ist dann  $\varepsilon_{j_2} - \varepsilon_{j_1}$ , da diese Energie, bei Vernachlässigung der Restwechselwirkung, aufgebracht werden muß, um ein Nukleon aus dem Zustand  $j_1$  in den Zustand  $j_2$  anzuheben.

Ein verhältnismäßig einfaches Verfahren, die angeregten Zustände und deren Energien zu bestimmen, besteht darin, die Eigenwertgleichungen der Säkularmatrix

$$\{(\varepsilon_{j_2} - \varepsilon_{j_1})\delta_{j_1 j_1'}\delta_{j_2 j_2'} + \langle \bar{j}_1' j_2' | V | \bar{j}_1 j_2 \rangle\} \{C_n(\bar{j}_1' j_2')\} = E_n \{C_n(\bar{j}_1' j_2')\} \quad (3.8)$$

zu lösen. Die Komponenten des Spaltenvektors  $\{C_n(\bar{j}_1 j_2)\}$  geben die Beimischung des Teilchen-Loch-Paares  $|\bar{j}_1, j_2\rangle$  zum  $n$ -ten angeregten Zustand der Energie  $E_n$ . Dieses Verfahren ist in der Literatur als Tamm-Dancoff-Methode

bekannt [31]. Sie wurde z. B. in WE zur Bestimmung der Teilchen-Loch-Zustände in  $\text{Ca}^{40}$  verwendet und deren Formfaktoren für unelastische Elektronenstreuung, soweit sie zur Bildung der Riesenresonanz beitragen, bestimmt.

Ein gegenüber der Tamm-Dancoff-Methode verbessertes Verfahren zur Ermittlung der angeregten Teilchen-Loch-Zustände und ihrer Energien stellt die Zufallsphasennäherung (random phase approximation, RPA) dar. Diese Methode [31–34] ist dem zeitabhängigen Hartree-Fock-Verfahren äquivalent. Die wesentliche Modifikation gegenüber der Tamm-Dancoff-Methode besteht darin, daß bereits im Grundzustand Beimischungen von angeregten Teilchen-Loch-Paaren berücksichtigt werden. Als angeregte Zustände werden dann wiederum solche Zustände betrachtet, die sich vom Grundzustand durch die Anregung eines weiteren Teilchen-Loch-Paares unterscheiden.

Wir wollen diese Methode am Beispiel des zeitabhängigen Hartree-Fock-Verfahrens kurz skizzieren [33]. Hierfür ist der Formalismus der  $N$ -Darstellung am bequemsten. Es seien  $a_{j_1}^+$  bzw.  $a_{j_1}$  Erzeugungs- bzw. Vernichtungsoperatoren für Nukleonenzustände unterhalb der Fermikante,  $a_{j_2}^+$  bzw.  $a_{j_2}$  Erzeugungs- bzw. Vernichtungsoperatoren für Zustände oberhalb der Fermikante. Ohne die virtuelle Anregung von Teilchen-Loch-Paaren sind im Grundzustand alle Zustände unterhalb der Fermikante besetzt, alle Zustände oberhalb der Fermikante unbesetzt.

Für die zeitabhängige Wellenfunktion des Systems unter dem Einfluß einer äußeren Störung (elektromagnetisches Feld) werde der Ansatz

$$|\Psi(t)\rangle = |\Psi_0\rangle e^{-iW_0 t} + \sum_n b_n |\Psi_n\rangle e^{-iW_n t} \quad (3.9)$$

gemacht. Hier bezeichnet  $|\Psi_0\rangle$  den Grundzustand mit der Energie  $W_0$  und  $|\Psi_n\rangle$  den  $n$ -ten angeregten Zustand mit der Energie  $W_n$ . Die Koeffizienten  $b_n$  seien klein. Die Elemente der Dichtematrix  $\varrho_{j_1 j_2} = \langle \Psi(t) | a_{j_2}^+ a_{j_1} | \Psi(t) \rangle$  bestimmen sich aus (3.9) unter Vernachlässigung von Gliedern bilinear in den  $b_n$  zu

$$\varrho_{j_1 j_2} = \varrho_{j_2 j_1}^* = \sum_n [b_n e^{-iE_n t} C_n(\bar{j}_1 j_2) + b_n^* e^{iE_n t} C_n(j_1 \bar{j}_2)]. \quad (3.10)$$

Hierbei wurden die Anregungsenergien  $E_n = W_n - W_0$  eingeführt. Die Größen

$$C_n(\bar{j}_1 j_2) = \langle \Psi_0 | a_{j_1}^+ a_{j_2} | \Psi_n \rangle, \quad (3.11a)$$

$$C_n(j_1 \bar{j}_2) = \langle \Psi_0 | a_{j_2}^+ a_{j_1} | \Psi_n \rangle \quad (3.11b)$$

geben die Beimischung der Zustände  $a_{j_2}^+ a_{j_1} | \Psi_0 \rangle$  bzw.  $a_{j_1}^+ a_{j_2} | \Psi_0 \rangle$  zum  $n$ -ten angeregten Zustand. Anregungen aus dem Grundzustand erfolgen also durch Erzeugung bzw. Vernichtung eines Teilchen-Loch-Paares im Grundzustand. Mit Hilfe der linearisierten Bewegungsgleichung für die Dichtematrix  $\varrho$  erhält man folgendes Eigenwertproblem für die Bestimmung der  $C_n$  und der zugehörigen Energien:

$$\left\{ \begin{array}{ll} (\varepsilon_{j_2} - \varepsilon_{j_1}) \delta_{j_1 j_1'} \delta_{j_2 j_2'} + \langle \bar{j}_1' \bar{j}_2' | V | \bar{j}_1 \bar{j}_2 \rangle & \langle \bar{j}_1' \bar{j}_2' | V | \bar{j}_1 \bar{j}_2 \rangle \\ -\langle j_1' j_2' | V | j_1 j_2 \rangle & -(\varepsilon_{j_2} - \varepsilon_{j_1}) \delta_{j_1 j_1'} \delta_{j_2 j_2'} - \langle j_1' j_2' | V | j_1 j_2 \rangle \end{array} \right\} \times \left\{ \begin{array}{l} C_n(\bar{j}_1' \bar{j}_2') \\ C_n(j_1' j_2') \end{array} \right\} = E_n \left\{ \begin{array}{l} C_n(\bar{j}_1' \bar{j}_2') \\ C_n(j_1' j_2') \end{array} \right\}. \quad (3.12)$$

Die in (3.12) auftretende Matrix ist nicht hermitisch. Wie man mit Hilfe der Beziehung (3.2) zwischen Teilchen- und Lochzuständen zeigen kann, besitzt sie die Struktur  $\begin{Bmatrix} A & B \\ -B^* & -A^* \end{Bmatrix}$ . Sind alle Eigenwerte einer solchen Matrix verschieden, so treten sie [32] paarweise mit entgegengesetztem Vorzeichen auf. Die Orthogonalisierungsvorschrift für die Eigenvektoren einer solchen Matrix lautet

$$\sum_{j_1 j_2} [C_n^*(\bar{j}_1 \bar{j}_2) C_n(\bar{j}_1' \bar{j}_2') - C_n^*(j_1 j_2) C_n(j_1' j_2')] = \langle E_n | E_n \rangle \delta_{nn'}. \quad (3.13)$$

Von physikalischem Interesse sind nur die Eigenvektoren mit  $E_n > 0$ , die mit den angeregten Zuständen des Systems identifiziert werden [34]. Das Auftreten der unphysikalischen Eigenlösungen mit  $E_n < 0$  hängt damit zusammen, daß in der Herleitung von (3.12) an keiner Stelle angenommen wurde, daß der Zustand  $|\Psi_0\rangle$  der Grundzustand des Systems ist. Nimmt man an, daß  $|\Psi_0\rangle$  der Grundzustand ist, so sind alle Eigenlösungen mit  $E_n < 0$  auszuschließen.

Die Tamm-Dancoff-Methode bildet einen Grenzfall des eben betrachteten Verfahrens. Sind im Grundzustand keine virtuellen Paare vorhanden, so sind offensichtlich alle  $C_n(j_1 \bar{j}_2) = 0$  und (3.12) geht in (3.8) über.

#### 4. Angeregte Zustände mit E1-Charakter und $T = 1$ in $\text{Ca}^{40}$

Den in Abschnitt 3 gemachten Voraussetzungen entsprechend berücksichtigen wir für die Berechnung der Teilchen-Loch-Zustände nur die beiden der Fermikante unmittelbar benachbarten Schalen. Für  $\text{Ca}^{40}$  kommen somit die Unterschalen  $1d_{3/2}$ ,  $1d_{5/2}$  und  $2s_{1/2}$  unterhalb der Fermikante und die Unterschalen  $1f_{5/2}$ ,  $1f_{7/2}$ ,  $2p_{1/2}$  und  $2p_{3/2}$  oberhalb der Fermikante in Frage. Die zugehörigen Einteilchenenergien, wie sie aus den Anregungs- und Bindungsenergien benachbarter Nuklide erhalten werden können [35], sind in Tabelle 1 angegeben. Die Werte sind die gleichen, wie sie schon in WE benützt wurden. Für die Auswertung des Radialanteils im Matricelement (3.6) werden die Eigenfunktionen des harmonischen Oszillators [27] verwendet. Der Reichweiteparameter  $\lambda$  des harmonischen Oszillators tritt nur zusammen mit der Potentialtiefe  $V_0$  in der Kombination  $\tilde{V} = V_0 \lambda^3/4$  auf, es braucht also über ihn nicht verfügt zu werden. Für die numerische Auswertung werden die in des Matricelementen (3.6) auftretenden Parameter  $\tilde{V}$  und  $\eta$  nach WE so gewählt, daß sie experimentell ermittelte Struktur der Riesenresonanz bei kleinen Impulsübertragungen möglichst gut wiedergegeben wird. Die durch Diagonalisieren

Tabelle 1. Einteilchenniveaus für  $\text{Ca}^{40}$  und deren Energien, bezogen auf das oberste, im Grundzustand aufgefüllte Niveau  $1d_{3/2}$ 

$nl_j$	E (MeV)
$1f_{5/2}$	13,95
$2p_{1/2}$	11,35
$2p_{3/2}$	9,55
$1f_{7/2}$	7,45
$1d_{3/2}$	0
$2s_{1/2}$	-2,6
$1d_{5/2}$	-7,0

von (3.12) erhaltenen Energien der Teilchen-Loch-Zustände von  $\text{Ca}^{40}$  mit den zugehörigen Eigenfunktionen sind in den Tabellen 2 bis 4 wiedergegeben.

Ein Vergleich der Energien der angeregten Zustände in den Tabellen 2 bis 4 mit den nach der Tamm-Dancoff-Methode erhaltenen Werten in WE zeigt, daß durch die Verbesserung des Näherungsverfahrens sich die Energien der angeregten Zustände im allgemeinen nur unwesentlich ändern, vor allem bei den vier tiefsten Zuständen. Allerdings tritt für zwei der betrachteten Parameterpaare der Restwechselwirkung eine Absenkung der Energie um etwa 1 MeV auf bei jeweils dem Zustand mit der dominierenden Dipolstärke. Da es gerade dieser Zustand ist, der die Lage des Maximums der Riesenresonanz bei kleinen Impulsübertragungen bestimmt, ist die Struktur der Riesenresonanz nicht unabhängig von verwendeten Näherungsverfahren.

Tabelle 2. Komponenten der angeregten Teilchen-Loch-Zustände mit  $J^P = 1^-$  und  $T = 1$  für  $\tilde{V} = 9,14$  MeV und  $\eta = 0,135$ 

E (MeV) $C(j_1; j_2)$	23,5	19,0	18,3	15,9	15,0	13,9	12,5	10,2
$C(\overline{1d_{3/2}}; 2p_{3/2})$	0,009	-0,036	0,020	0,017	0,018	0,063	-0,330	0,942
$C(\overline{1d_{3/2}}; 2p_{1/2})$	0,014	0,108	0,076	-0,023	-0,010	-0,111	0,928	0,333
$C(\overline{1d_{3/2}}; 1f_{5/2})$	0,305	0,336	-0,159	0,419	0,778	0,016	-0,005	-0,012
$C(\overline{2s_{1/2}}; 2p_{1/2})$	0,104	0,059	-0,102	0,814	-0,515	-0,229	-0,016	0,009
$C(\overline{2s_{1/2}}; 2p_{3/2})$	0,032	0,189	-0,146	0,110	-0,198	0,941	0,108	-0,014
$C(\overline{1d_{5/2}}; 1f_{7/2})$	0,206	0,725	-0,435	-0,363	-0,269	-0,217	-0,098	0,026
$C(\overline{1d_{5/2}}; 2p_{3/2})$	0,090	0,473	0,875	0,021	-0,074	0,029	-0,107	-0,039
$C(\overline{1d_{5/2}}; 1f_{5/2})$	0,921	-0,330	0,078	-0,154	-0,127	0,034	0,021	-0,012
$C(\overline{1d_{3/2}}; \overline{2p_{3/2}})$	0,013	0,015	0,034	0,003	0,005	0,005	-0,016	0,024
$C(\overline{1d_{3/2}}; \overline{2p_{1/2}})$	0,014	0,028	0,038	-0,001	0,004	-0,002	0,014	0,009
$C(\overline{1d_{3/2}}; \overline{1f_{5/2}})$	0,024	0,095	-0,048	-0,012	-0,002	0,000	0,004	-0,003
$C(\overline{2s_{1/2}}; \overline{2p_{1/2}})$	0,000	-0,030	0,028	0,005	0,011	-0,055	-0,002	-0,001
$C(\overline{2s_{1/2}}; \overline{2p_{3/2}})$	0,031	0,022	-0,023	0,058	-0,026	0,021	0,001	-0,001
$C(\overline{1d_{5/2}}; \overline{1f_{7/2}})$	-0,004	0,101	-0,035	0,051	0,051	-0,006	-0,003	0,004
$C(\overline{1d_{5/2}}; \overline{2p_{3/2}})$	0,005	0,031	0,021	-0,010	0,002	-0,011	0,050	-0,022
$C(\overline{1d_{5/2}}; \overline{1f_{5/2}})$	0,043	0,029	-0,020	-0,015	-0,011	-0,025	-0,015	0,006

Tabelle 3. Komponenten der angeregten Teilchen-Loch-Zustände mit  $JP = 1^-$  und  $T = 1$  in  $\text{Ca}^{40}$  für  $\tilde{V} = 9,14$  MeV und  $\eta = 0,064$

E (MeV) $C(j_1; j_2)$	23,4	19,1	18,2	15,9	15,0	13,9	12,6	10,2
$C(\underline{1d_{3/2}}; 2p_{3/2})$	0,021	-0,021	0,033	0,014	0,024	0,062	-0,362	0,930
$C(\underline{1d_{3/2}}; 2p_{1/2})$	-0,006	0,087	0,059	-0,020	-0,018	-0,106	0,920	0,364
$C(\underline{1d_{3/2}}; 1f_{5/2})$	0,219	0,436	-0,168	0,395	0,767	-0,002	0,001	-0,014
$C(\underline{2s_{1/2}}; 2p_{1/2})$	0,094	0,102	-0,115	0,825	-0,531	-0,098	-0,009	0,008
$C(\underline{2s_{1/2}}; 2p_{3/2})$	-0,022	0,175	-0,114	0,008	-0,117	0,968	0,104	-0,012
$C(\underline{1d_{5/2}}; 1f_{7/2})$	-0,094	0,769	-0,381	-0,356	-0,302	-0,204	-0,092	0,022
$C(\underline{1d_{5/2}}; 2p_{3/2})$	0,063	0,432	0,894	0,019	-0,075	0,027	-0,074	-0,052
$C(\underline{1d_{5/2}}; 1f_{5/2})$	0,968	-0,055	-0,048	-0,201	-0,146	0,009	0,012	-0,010
$C(\underline{1d_{3/2}}; 2p_{3/2})$	0,012	0,016	0,035	0,002	0,005	0,005	-0,022	0,028
$C(\underline{1d_{3/2}}; 2p_{1/2})$	0,009	0,027	0,037	-0,001	0,004	-0,002	0,009	0,011
$C(\underline{1d_{3/2}}; 1f_{5/2})$	-0,019	0,091	-0,037	-0,015	-0,005	0,003	0,005	-0,003
$C(\underline{2s_{1/2}}; 2p_{1/2})$	0,014	-0,029	0,015	0,017	0,005	-0,058	0,000	-0,001
$C(\underline{2s_{1/2}}; 2p_{3/2})$	0,022	0,029	-0,023	0,055	-0,023	0,022	0,001	-0,001
$C(\underline{1d_{5/2}}; 1f_{7/2})$	0,065	0,080	-0,026	0,031	0,033	0,000	0,000	0,002
$C(\underline{1d_{5/2}}; 2p_{3/2})$	-0,002	0,025	0,016	-0,004	-0,003	-0,012	0,051	-0,021
$C(\underline{1d_{5/2}}; 1f_{7/2})$	0,046	-0,033	0,016	0,025	0,019	-0,002	-0,004	0,004

Tabelle 4. Komponenten der angeregten Teilchen-Loch-Zustände mit  $JP = 1^-$  und  $T = 1$  in  $\text{Ca}^{40}$  für  $\tilde{V} = 6$  MeV und  $\eta = 0,135$

E (MeV) $C(j_1; j_2)$	22,4	18,0	17,4	15,3	14,7	13,4	12,1	10,0
$C(\underline{1d_{3/2}}; 2p_{3/2})$	0,009	-0,014	0,026	0,015	0,012	0,034	-0,247	0,968
$C(\underline{1d_{3/2}}; 2p_{1/2})$	0,005	0,098	0,004	-0,020	-0,003	-0,074	0,961	0,249
$C(\underline{1d_{3/2}}; 1f_{5/2})$	0,196	0,257	-0,346	0,497	0,731	-0,021	-0,012	-0,008
$C(\underline{2s_{1/2}}; 2p_{1/2})$	0,068	0,035	-0,127	0,764	-0,611	-0,156	-0,002	0,004
$C(\underline{2s_{1/2}}; 2p_{3/2})$	0,009	0,084	-0,175	0,064	-0,127	0,970	0,070	-0,010
$C(\underline{1d_{5/2}}; 1f_{7/2})$	0,112	0,439	-0,736	-0,396	-0,263	-0,172	-0,069	0,023
$C(\underline{1d_{5/2}}; 2p_{3/2})$	0,058	0,840	0,531	0,001	-0,059	0,020	-0,079	-0,022
$C(\underline{1d_{5/2}}; 1f_{5/2})$	0,971	-0,156	0,133	-0,109	-0,070	0,025	0,012	-0,010
$C(\underline{1d_{3/2}}; 2p_{3/2})$	0,008	0,020	-0,014	0,001	0,003	0,002	-0,009	0,018
$C(\underline{1d_{3/2}}; 2p_{1/2})$	0,008	0,031	-0,012	0,000	0,003	-0,002	0,011	0,005
$C(\underline{1d_{3/2}}; 1f_{5/2})$	0,007	0,044	0,063	-0,009	-0,001	0,004	0,004	-0,001
$C(\underline{2s_{1/2}}; 2p_{1/2})$	-0,002	-0,012	-0,022	0,006	0,006	-0,040	0,000	-0,001
$C(\underline{2s_{1/2}}; 2p_{3/2})$	0,018	0,010	0,024	0,039	-0,020	0,019	0,000	0,000
$C(\underline{1d_{5/2}}; 1f_{7/2})$	-0,015	0,051	0,057	0,037	0,028	-0,002	0,000	0,003
$C(\underline{1d_{5/2}}; 2p_{3/2})$	0,002	0,025	-0,001	-0,003	-0,001	-0,006	0,034	-0,017
$C(\underline{1d_{5/2}}; 1f_{5/2})$	0,027	0,014	0,024	-0,013	-0,004	-0,015	-0,009	0,005

Aus den Tabellen 2 bis 4 ist weiter ersichtlich, daß die Beimischungen von Zuständen, die ein Teilchen-Loch-Paar weniger als der Grundzustand enthalten, verhältnismäßig gering ist. Hingegen ist, vor allem bei den angeregten Zuständen in der zweiten und dritten Spalte, eine Veränderung der relativen Beimischungen der Zustände mit einem angeregten Teilchen-Loch-Paar gegenüber den Ergebnissen der Tamm-Dancoff-Methode festzustellen, vor allem bei den Parameterwerten  $\tilde{V} = 6 \text{ MeV}$ ,  $\eta = 0,135$ . Dies läßt eine Änderung in den relativen Dipolstärken und, in geringerem Maße, der Abhängigkeit der Übergangsmatrixelemente von der Impulsübertragung erwarten.

### 5. Transversale reduzierte Matrixelemente für $E1$ -Übergänge

Für einen  $0^+ \rightarrow 1^-$  Übergang nimmt der differentielle Wirkungsquerschnitt für unelastische Elektronenstreuung (2.18) folgende einfache Form an:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{0^+ \rightarrow 1^-} = 24\pi e^2 \frac{p_b}{p_a} \left[ \frac{E_a E_b - \mathbf{p}_a \cdot \mathbf{k} \mathbf{p}_b \cdot \mathbf{k} / k^2 - 1}{(k^2 - \varepsilon^2)^2} \left| \mathcal{M}_1^{(e)} \right|^2 + \frac{E_a E_b + \mathbf{p}_a \cdot \mathbf{p}_b + 1}{k^4} \left| \mathcal{M}_1^{(e)} \right|^2 \right]. \quad (5.1)$$

Im weiteren werden wir uns auf die Bestimmung der transversalen (elektrischen) reduzierten Matrixelemente  $\mathcal{M}_1^{(e)}$  beschränken, da nur diese eine charakteristische Abhängigkeit von der Impulsübertragung zeigen.

Durch Spezialisierung von (2.15a) und (2.16a) auf  $L = 1$  ergibt sich für das fragliche Matrixelement

$$\mathcal{M}_1^{(e)}(k) = i \int [(2/3)^{1/2} j_0(kr) \mathbf{T}_{10}^0(\vartheta, \varphi) - (1/3)^{1/2} j_2(kr) \mathbf{T}_{12}^0(\vartheta, \varphi)] \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \quad (5.2)$$

Zur Berechnung des Übergangstroms  $\mathbf{J}(\mathbf{r})$  nach (2.12a) wurde für den Stromoperator der isovektorielle Anteil des üblichen Einteilchenstromoperators [22] benützt. Der isoskalare Anteil kommt nicht zum Tragen, da wir nur Übergänge mit  $\Delta T = 1$  betrachten.

Die Quadrate der transversalen elektrischen Matrixelemente für die acht Teilchen-Loch-Zustände von  $\text{Ca}^{40}$  mit  $J^P = 1^-$  und  $T = 1$  in ihrer Abhängigkeit von der Impulsübertragung sind in den Abb. 1 bis 6 dargestellt. Als Einheit für die Impulsübertragung wurde der Oszillatorparameter  $\alpha$  gewählt, da die Impulsübertragung nur in der Kombination  $k/\alpha$  in den Matrixelementen  $\mathcal{M}_1^{(e)}$  auftritt. Ein Wert von  $\alpha \approx 100 \text{ MeV}$  ist sowohl mit den Ergebnissen für elastische Streuung [5] von Elektronen an  $\text{Ca}^{40}$  wie auch mit dem ungestörten Energiespektrum nach Tabelle 1 verträglich.

Die charakteristische Abhängigkeit der Übergangsmatrixelemente von der Impulsübertragung, wie sie für die vier Zustände über 15 MeV schon in WE gefunden wurde, tritt auch bei unseren Rechnungen nach dem RPA-Verfahren wieder auf. Dies war zu erwarten, da die Beimischungen von Zuständen, die der Vernichtung eines im Grundzustand vorhandenen Teilchen-Loch-Paares entsprechen, klein sind. Die im vorigen Abschnitt erwähnte Änderung der relativen Beimischungen von angeregten Teilchen-Loch-Zuständen führt, unabhängig

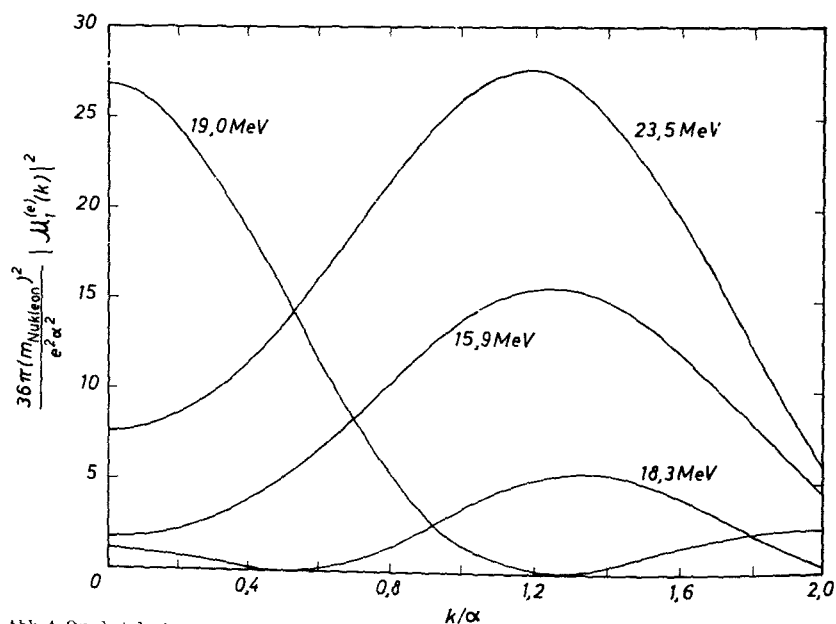


Abb. 1. Quadrat der transversalen Matrixelemente für E1-Übergänge vom Grundzustand zu den angegebenen Niveaus in Abhängigkeit von der Impulsübertragung für  $\tilde{V} = 9,14 \text{ MeV}$  und  $\eta = 0,135$

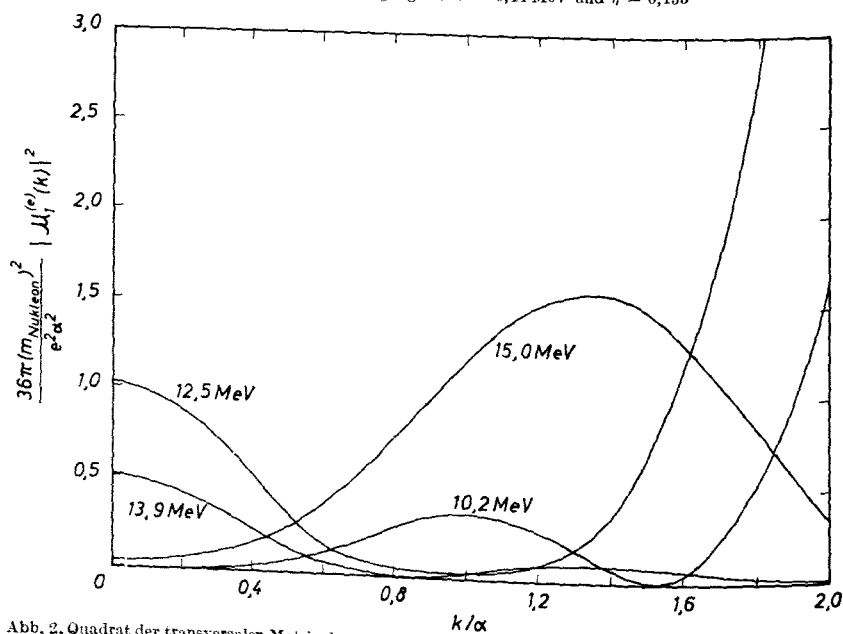


Abb. 2. Quadrat der transversalen Matrixelemente für E1-Übergänge vom Grundzustand zu den angegebenen Niveaus in Abhängigkeit von der Impulsübertragung für  $\tilde{V} = 9,14 \text{ MeV}$  und  $\eta = 0,135$



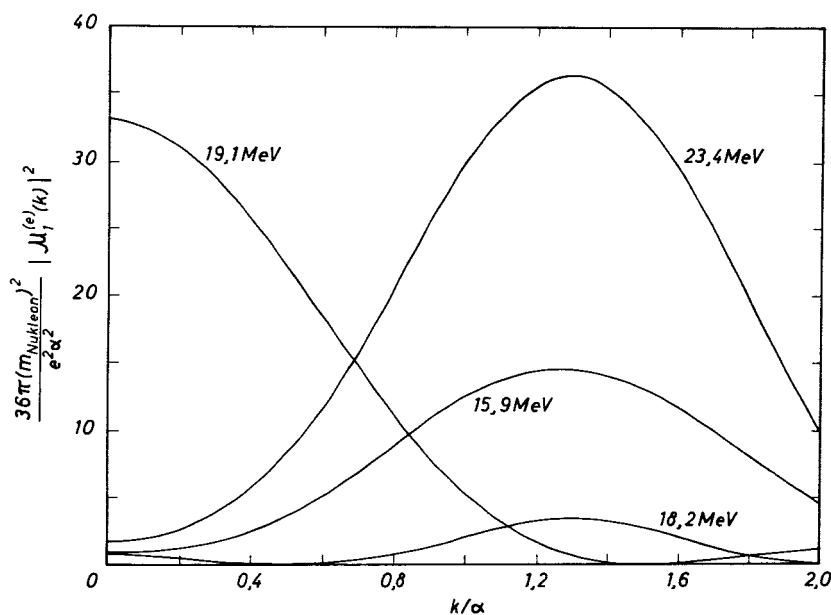


Abb. 3. Quadrat der transversalen Matrixelemente für E1-Übergänge vom Grundzustand zu den angegebenen Niveaus in Abhängigkeit von der Impulsübertragung für  $\tilde{\Gamma} = 9,14 \text{ MeV}$  und  $\eta = 0,064$

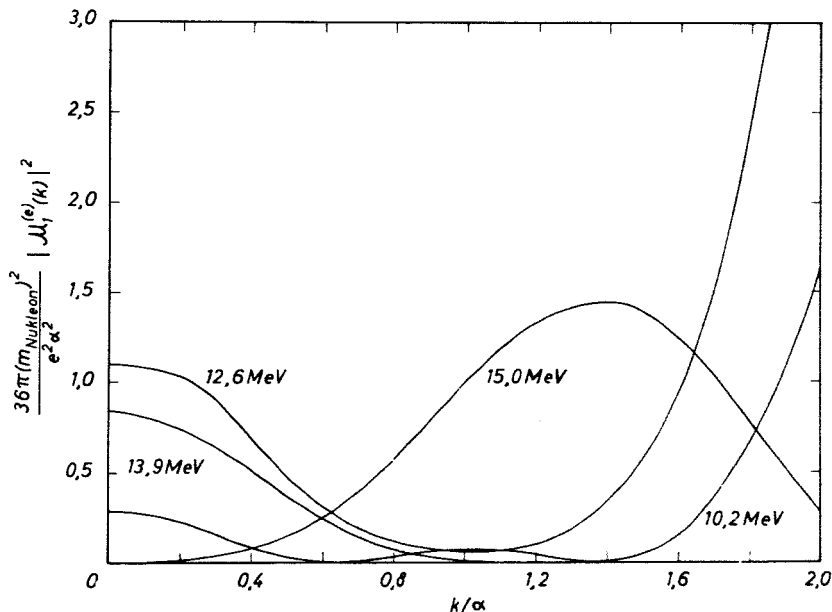


Abb. 4. Quadrat der transversalen Matrixelemente für E1-Übergänge vom Grundzustand zu den angegebenen Niveaus in Abhängigkeit von der Impulsübertragung für  $\tilde{\Gamma} = 9,14 \text{ MeV}$  und  $\eta = 0,064$

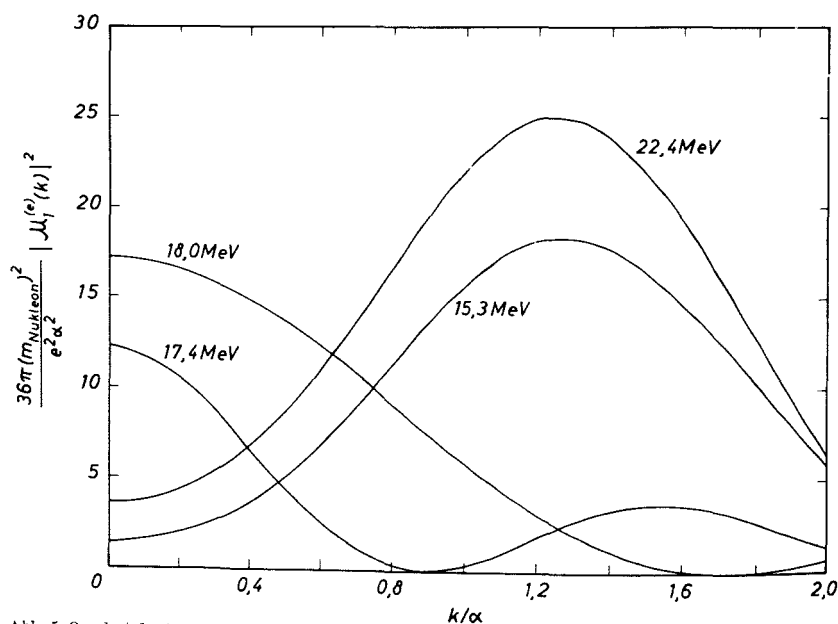


Abb. 5. Quadrat der transversalen Matrixelemente für E 1-Übergänge vom Grundzustand zu den angegebenen Niveaus in Abhängigkeit von der Impulsübertragung für  $\tilde{T} = 6.0$  MeV und  $\eta = 0.135$

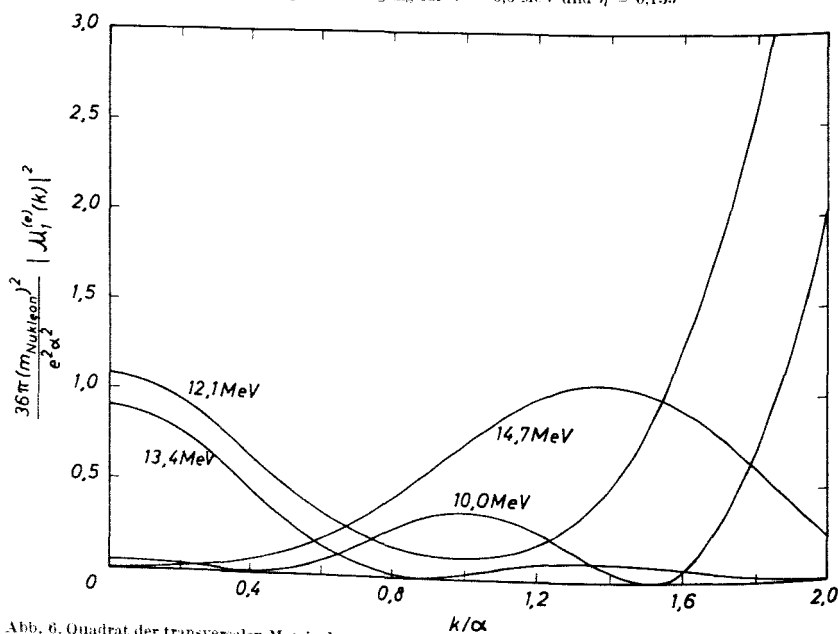


Abb. 6. Quadrat der transversalen Matrixelemente für E 1-Übergänge vom Grundzustand zu den angegebenen Niveaus in Abhängigkeit von der Impulsübertragung für  $\tilde{T} = 6.0$  MeV und  $\eta = 0.135$

vom Austauschcharakter, bei den Beispielen mit starkem Restwechselwirkungspotential ( $\tilde{V} = 9,14 \text{ MeV}$ ) zu einer Erhöhung der relativen Dipolstärke des bei kleinen Impulsübertragungen dominierenden Zustands.

Beachtenswert ist die verhältnismäßig hohe Dipolstärke bei kleinen Impulsübertragungen des  $17,4\text{-MeV}$ -Zustands bei  $\tilde{V} = 6 \text{ MeV}$  und  $\eta = 0,135$ . Die Form der Riesenresonanz [36] beim  $(\gamma, n)$ -Prozeß an  $\text{Ca}^{40}$  läßt auf mindestens ein Niveau mit einiger Dipolstärke dicht unterhalb des Niveaus mit maximaler Dipolstärke schließen. In der Tamm-Dancoff-Näherung erhält dieser Zustand eine nennenswerte Dipolstärke erst bei kleineren Werten von  $\tilde{V}$ , die eine weitere energetische Absenkung der (für diese Parameterwerte ohnehin schon zu tief liegenden) Riesenresonanz zur Folge haben.

Die an  $\text{Ca}^{40}$  durchgeführten Messungen [37, 38] des Wirkungsquerschnitts für unelastische Elektronenstreuung erfolgten in Winkelbereichen, in denen der Coulombanteil am Wirkungsquerschnitt dominiert. Die experimentellen Ergebnisse bieten daher noch keine Möglichkeit, den transversalen Anteil des Wirkungsquerschnitts zu separieren und als Funktion der Impulsübertragung zu betrachten. Es wäre wünschenswert, solche Messungen für Rückwärtsstreuung durchzuführen, wo vermöge des kinematischen Faktors im Wirkungsquerschnitt (2.18) die Kernanregung vorwiegend über den transversalen Anteil der Wechselwirkung erfolgt. Die charakteristische Abhängigkeit der transversalen Matrixelemente von der Impulsübertragung würde dann eine wesentlich bessere Möglichkeit geben, Strukturen im Wirkungsquerschnitt mit angeregten Zuständen des Teilchen-Loch-Modells zu identifizieren, als dies durch die Kenntnis der relativen Dipolstärke allein geschehen kann. Der hier durchgeführte Vergleich der Tamm-Dancoff-Methode mit dem RPA-Verfahren zeigt, daß bei einer solchen theoretischen Interpretation der Struktur der Riesenresonanz nach dem Teilchen-Loch-Modell dem RPA-Verfahren der Vorzug zu geben wäre.

## 6. Zusammenfassung

Unter Benützung einer kurzreichweitigen Restwechselwirkung mit Spinaustauschcharakter wurden die angeregten Teilchen-Loch-Zustände von  $\text{Ca}^{40}$ , die Spin/Parität  $J^P = 1^-$  und Isospin  $T = 1$  besitzen, sowie deren Energien, nach der Zufallsphasennäherung bestimmt. Diese Zustände können durch unelastische Elektronenstreuung angeregt werden, die entsprechenden elektromagnetischen Übergänge vom Grundzustand aus besitzen elektrischen Dipolcharakter und tragen wesentlich zum Zustandekommen der Riesenresonanz bei. Die Übergangsmatrixelemente für den transversalen Anteil der elektromagnetischen Wechselwirkung wurden in ihrer Abhängigkeit von der Impulsübertragung ausgewertet. Die erhaltenen Ergebnisse wurden mit früheren Untersuchungen, bei denen das Teilchen-Loch-Modell nach der einfacheren Tamm-Dancoff-Methode behandelt wurde, verglichen mit dem Ziel, den Einfluß der Näherungsmethode für die Behandlung des Teilchen-Loch-Modells auf die für die unelastische Elektronenstreuung relevanten Resultate festzustellen. Für die betrachteten Parameterwerte der Restwechselwirkung zeigte sich, daß durch die Verbesserung des Näherungsverfahrens eine Veränderung der relativen energetischen Lage der angeregten Zustände bis zu  $1 \text{ MeV}$  auftreten kann, was

zu einer Veränderung der Struktur der Riesenresonanz führt. Ferner ergab sich eine Änderung in der relativen Beimischung von Einteilchen-Einloch-Anregungen zu den angeregten Zuständen, die für bestimmte Parameterwerte der Restwechselwirkung eine erhebliche Verschiebung der relativen Dipolstärken angeregter Zustände zur Folge hatte. Die charakteristische Abhängigkeit der Übergangsmatrixelemente, die das Teilchen-Loch-Modell in Übereinstimmung mit dem Experiment vor anderen theoretischen Vorstellungen über das Zustandekommen der Riesenresonanzen bei leichten Kernen auszeichnet, blieb auch in der verbesserten Näherung erhalten.

Herrn Prof. Dr. *M. Kohler* möchte ich aufrichtig danken für seine großzügige Förderung und für das stete Interesse, das er dem Fortgang dieser Arbeit entgegenbrachte.

Weiter gilt mein Dank Herrn Prof. Dr. *G. Cario* für die günstigen Arbeitsbedingungen, die er mir während meiner Tätigkeit in seinem Institut einräumte.

Die numerischen Rechnungen wurden am Rechenzentrum der TH Braunschweig durchgeführt. Herrn Prof. Dr. *H. Herrmann* bin ich für die zur Verfügung gestellte Rechenzeit zu großem Dank verpflichtet; seinen Mitarbeitern, insbesondere Herrn Dr. *G. Bayer* danke ich für ihre bereitwillige Hilfe und Unterstützung.

Weiterhin möchte ich die langjährige, freundschaftliche Zusammenarbeit mit Herrn Priv.-Doz. Dr. *F. Münnich* dankend erwähnen.

## Literatur

- [1] *W. C. Barber*: Ann. Rev. Nucl. Sci. **12** (1962) 1.
- [2] *J. Goldemberg, Y. Torizuka, W. C. Barber und J. D. Walecka*: Nucl. Phys. **43** (1963) 242.
- [3] *F. H. Lewis, J. D. Walecka, J. Goldemberg und W. C. Barber*: Phys. Rev. Lett. **10** (1963) 493, **11** (1963) 105.
- [4] *R. S. Willey*: Phys. Lett. **6** (1963) 336.
- [5] *Vincent Gillet und Michel A. Melkanoff*: Phys. Rev. **133** (1964) B 1190.
- [6] *L. J. Weigert und J. M. Eisenberg*: Nucl. Phys. **53** (1964) 508<sup>1)</sup>.
- [7] *F. H. Lewis und J. D. Walecka*: Phys. Rev. **133** (1964) B 849.
- [8] *F. H. Lewis*: Phys. Rev. **134** (1964) B 331.
- [9] *George R. Bishop und Richard Wilson* in: Handbuch der Physik Bd. XLII (Springer, Berlin, 1957).
- [10] *M. Goldhaber und E. Teller*: Phys. Rev. **74** (1948) 1046.
- [11] *H. Steinwedel und J. Hans D. Jensen*: Z. Naturforsch. **5a** (1950) 413.
- [12] *M. Danos und W. Greiner*: Phys. Rev. **134** (1964) B 284.
- [13] *A. Bohr*: Dan. Mat. Fys. Medd. **26**, no. 14 (1952).
- [14] *A. Bohr und B. Mottelson*: Dan. Mat. Fys. Medd. **27**, no. 16 (1953).
- [15] *A. Faessler und W. Greiner*: Z. Phys. **168** (1962) 425, **170** (1962) 105, **177** (1964) 190.
- [16] *M. Danos und W. Greiner*: Phys. Lett. **8** (1964) 113.
- [17] *D. H. Wilkinson*: Physica **22** (1956) 1039.
- [18] *G. E. Brown und M. Bolsterli*: Phys. Rev. Lett. **3** (1959) 472.
- [19] *G. E. Brown, L. Castillejo und J. A. Evans*: Nucl. Phys. **22** (1961) 1.
- [20] *N. Vinh Mau und G. E. Brown*: Nucl. Phys. **29** (1962) 89.

<sup>1)</sup> Diese Arbeit wird auch als WE zitiert.

- [21] *N. Vinh Mau*: Theses, Universität Paris 1963.
- [22] *R. S. Willey*: Nucl. Phys. **40** (1963) 529.
- [23] *T. A. Griffy, D. S. Onley, J. T. Reynolds* und *L. C. Biedenharn*: Phys. Rev. **128** (1962) 833.
- [24] *W. Czyż* und *K. Gottfried*: Ann. Phys. (New York) **21** (1963) 47.
- [25] *L. J. Weigert* und *M. E. Rose*: Nucl. Phys. **51** (1964) 529.
- [26] *M. E. Rose*: Elementary Theory of Angular Momentum (John Wiley and Sons, New York, 1957).
- [27] *Maria Goeppert Mayer* und *J. Hans D. Jensen*: Elementary Theory of Nuclear Shell Structure (John Wiley and Sons, New York, 1955).
- [28] *E. U. Condon* und *G. H. Shortley*: The Theory of Atomic Spectra (The University Press, Cambridge, 1935).
- [29] *J. S. Bell*: Nucl. Phys. **12** (1959) 117.
- [30] *J. P. Elliot* und *A. M. Lane* in: Handbuch der Physik Bd. XXXIX (Springer, Berlin 1957).
- [31] *A. M. Lane*: Nuclear Theory (Benjamin, New York, 1964).
- [32] *D. J. Thouless*: Nucl. Phys. **22** (1961) 78.
- [33] *G. E. Brown*: Unified Theory of Nuclear Models (North-Holland, Amsterdam, 1964).
- [34] *M. Baranger*: in: 1962 Cargese Lectures in Theoretical Physics (Benjamin, New York 1963).
- [35] *Bernard L. Cohen*: Phys. Rev. **130** (1963) 227.
- [36] *J. E. E. Baglin* und *B. M. Spicer*: Nucl. Phys. **54** (1964) 549.
- [37] *J. P. Perez y Jorba* und *H. Nguyen Ngoc*: J. Phys. Radium **22** (1961) 551.
- [38] *M. Hors, H. Nguyen Ngoc* und *J. Perez y Jorba*: Phys. Lett. **9** (1964) 40.